

Title	函数空間ニ於ケル距離付ケ不能ナ一例
Author(s)	南雲, 道夫
Citation	全国紙上数学談話会. 72 p.36-p.39
Issue Date	1935-12-27
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74237">https://doi.org/10.18910/74237</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

### 315. 函数空間=於ケル距離付ケ不能ナ一例

南 雲 道 夫 (阪大)

[1] 抽象空間論=ツイテ門外漢デアル私ハ次ノコトヲ本紙=載セテ、識者ノ御教示ヲ仰ヤタク思ヒマス。(問題ノ内容カラ見テ既=有名ナ事実デアル様=想像サレマス)

函数集合=距離ヲバ適當=定義スルコト=ヨリ、一樣收斂々平均收斂等便利ナ方法ガ函数体系ノ理論=用ヒラレテキル。

之等ハ距離ガ定義サレテキレカラ、抽象空間論=於ケル距離空間デアル。

所ガ抽象空間論=於テハ(極限ノ概念ヲバ主眼トスルカラ)連続寫像(位相幾何学的変換)=於イテ不変性ヲ持タヌ距離ヲバ抽象シテ只一聯ノ公理体系=ヨリ抽象的=近傍ナル概念ヲ導入スル。Hausdorffノ近傍系ハ之デアル。(今日ノ抽象空間論ハモット極端=抽象化サレテキル)

然シ解析論=於ケル距離ガ持ツ意味ハ重大デ、抽象空間論=於ケル如ク、之レヲ直チ=抽象シ去ルコトハ一般=ハ許サレナイ。(Hilbert空間論=於ケル inner product

「重要性ノ如シ」之レヲ抽象シ去ル必要サヘ生ジナケレバ、  
距離ヲ保留シ活用スルコトガ有意義デアレ。所ガ解析論ニ於  
テ距離付ケ！不可能ナ場合が存在スル！

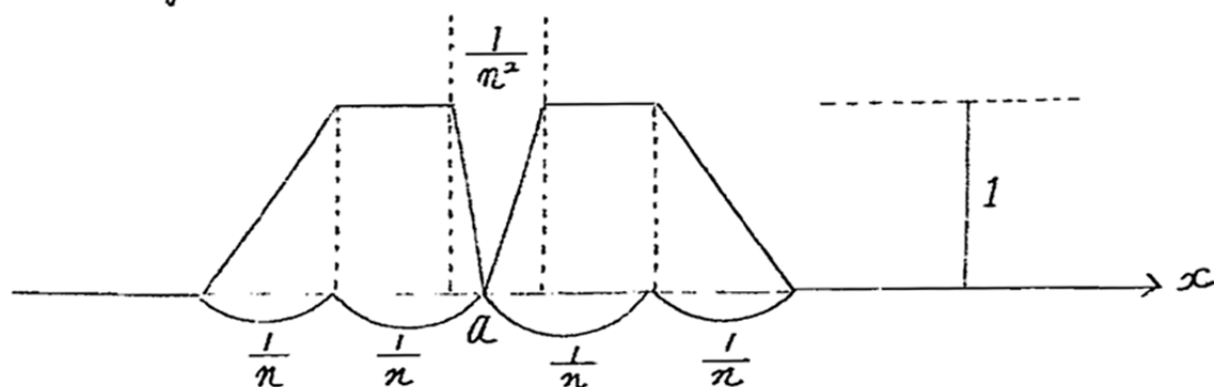
此ノ場合トハ（一般ノ解析論ニ於テハ）特別ニ病理的ナ  
場合デハナク、ムシロ 普通ノ場合 ナデアレ。次ニ之レヲ示  
サウ。

[2] 實數開區間  $\alpha \leq x \leq \beta$  ニ於テ定義サレタ實數値  
ヲ取ル 連続函数  $y = f(x)$  ノ集合ヲ  $\mathcal{F}$  トスル。  $\mathcal{F}$   
内ニ於ケル 一般ノ收斂、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = F(x) \in \mathcal{F}$ 、ヲ  
特徴付ケル ヲウナ  $\mathcal{F}$ 、距離付ケハ不可能デアル！〔 $\mathcal{F}$   
ハ一様有界デモヨイ。〕

(註) 上ニ言フ一般ノ收斂トハ、 $\alpha \leq x \leq \beta$  ニ於ケル 各  
 $x$ ニツキ  $f_n(x)$  ガ  $F(x)$  ニ收斂スルコトデアル。（従ツテ  
一様收斂デハナイ。）

(証明) 距離付ケ不能ナル例ヲ示セバヨイ。

$y = f_n(x, a)$  ヲ、右ノ如キ函数トスル。



然ラバ  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x, a) = 0$ . 故ニ  $y = f_n(x, a)$  ト  
 $y = 0$  トノ距離ヲ  $\rho(n, a)$  トスルニ、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(n, a) = 0$ .

今任意、自然数  $m$  = 對シテ、各  $a$  = ツキ  $\rho(n, a) < \frac{1}{m}$   
 且ツ  $n > 2^m$  + ルヤウ =  $n(a, m)$  = 定メル。各点  $x = a$   
 = 中心トスル幅  $\frac{2}{n(a, m)}$  + ル開區間ヲ  $I_a^m$  デ示ス。Borel  
 ノ被覆定理 = ヨリ、( $m$  = 一定トスル時) 開テタ區間  $[\alpha, \beta]$   
 ハ有限個、 $I_a^m$  デ覆ハレル。

從ツテ  $f_n(x, a)$  及ビ  $n(a, m)$  ノ定義 = ヨリ、 $[\alpha, \beta]$   
 カラ長さノ總和ガ  $\frac{\beta - \alpha}{2^m}$  以下 + ル有限個ノ開區間ヲ除イタ  
 残りノ閉集合  $\mathcal{M}_m$  = 於テ、ソノ任意ノ一点 = 對シテハ必ズ  
 $f_n(x, a) = 1$  + ルヤウノ函数ガ存在スル。總テノ閉集合  
 $\mathcal{M}_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, \dots$ ) ノDurchschnittハ空  
 テ+イ閉集合デイル。

從ツテソノ一点ヲ  $x = \xi$  トスレバ  $x = \xi$  = 於テ

$$f_{n(a, m)}(\xi, a) = 1 \quad (a \wedge \xi = \text{從屬スル})$$

+ ルヤウノ函数ガ存在スル (各  $m$  = ツキ)。所ガカナル函  
数 = ツイテハ  $\rho(n, a) < \frac{1}{m}$ 。從ツテ  $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(n, a) = 0$ 。

故 =  $\lim_{m \rightarrow \infty} f_{n(a, m)}(x, a) = 0$  テ+ケレバ+ラヌ (若  
 シモ一般ノ收斂ノ特徴付ケガ可能+ラバ) 之ハ  $x = \xi$  = 於  
 イテ

$$f_{n(a, m)}(\xi, a) = 1$$

+ ルコトト相容レ+イ。即チ一般ノ收斂ヲ特徴付ケルヤウナ  
 距離付ケハ不可能デイル。

[3] 以上ノ証明デハ距離 = 關スル三角不等式ガヘモ全然  
 用ヒラレテキナイ。從ツテ距離空間 = 於テ距離 = 關スルニ

角不等式ヲ捨テ、モ一般ノ收斂ヲ距離化スルコトハ不可能デア  
ル。

以上、問題ハ抽象空間論ニ於ケル距離化ノ理論（必要條  
件）カラ見レバ、平凡ナ一例題ニスギナイデアラウ。茲ニ今  
更ナカラ私ノ平素ノ不勉強ヲ告白セザレヲ得ナイ。

上ノ如クニ、一般ノ收斂ヲ特徴付ケルマウナ距離ノ定義  
が不可能ナコトが分ツテ見レバ、近年 *Tychonoff* が一般  
ノ收斂ヲ特徴付ケルマウナ (*Hausdorff*ノ意味、) 近傍ヲ  
定義シタコトノ意義が解ル様ナ氣がスル。

(*Math. Ann* 102.) 尚 *Tychonoff*ノ近傍ノ定義ニ  
ヨレバ一様ニ有界ナ函数集合が緊ツテキル (*compact*ノ訳  
ノツモリ、少シ調子が悪い訳だが、意味ハ之がヨクアテハマ  
ルト思フ) 事ニナル。之ハ實ニ注目スベキコトデアル!! 然  
シ此ノ近傍ノ意味ニ於ケル汎函数ノ連続性ハ本質的ニハ *Vol-*  
*lstetigkeit* デアル様ニ思ハレルノデ、應用上ノ範圍が果  
シテドノ位廣イモノデアルカハ私ニハ未ダ疑問デアル。

—— 以 上 ——